Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2023

1er Parcial (25/09/2023)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido:

Libreta Universitaria:

Total de hojas entregadas (sin enunciado): 5

Ej. 1 24	Ej. 2 18	Ej. 3 27	Ej. 4 27	Nota 96

☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.	**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1. Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Fijamos un $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tal que $C^k x = 0$ para algún $k > 0$. Definimos:

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\} \quad \text{y} \quad S = \{x, Cx, C^2x, \ldots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

a) (6 puntos) $S \subseteq Nu(C^r)$.

b) (12 puntos) S es linealmente independiente.

c) (8 puntos) $dim(Im(C^r)) \leqslant n - r$.

Ejercicio 2. (20 puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de Hessenberg[1] y sea $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial** cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas. Si $a_k := \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}^{(k)}|$ es el elemento máximo en módulo de la matriz $A^{(k)}$, probar que $a_k \leqslant (k+1)a_0$ para $k = 1, \ldots, n-1$.
Sugerencia: aplicar inducción en k, y suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial.

Ejercicio 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde $\forall\ z \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $x \in Nu(A)$, $y \in Nu(B)$ tal que $z = x + y$.

a) (7 puntos) Si A es simétrica, probar que $z^tAz > 0$ para todo $z \notin Nu(A)$ si y sólo si $y^tAy > 0$ para todo $y \in Nu(B)$ no nulo.

b) (9 puntos) Demostrar que (A es simétrica y $A - B$ es simétrica definida positiva) si y sólo si (A y B son simétricas y para todo $x \in Nu(A)$, $y \in Nu(B)$ vale que $y^tAy > x^tBx$, excepto si $x = y = 0$.)

c) (11 puntos) Si $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que existe una matriz diagonal B y L triangular inferior con elementos de la diagonal positivos tal que $A = B + LL^t$.

Ejercicio 4. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y sea $S(Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}$.

a) (7 puntos) Probar que $|S(Q)| \leqslant n$.
Sugerencia: usar $u = \sum_{i=1}^n e_i$, la suma de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

b) (10 puntos) Dar ejemplos de matrices de Givens G_1 y $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donde $|S(G_1)| = n$ y $|S(G_2)| < n$.

c) (10 puntos) Probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector con $||v||_2 = 1$ entonces $0 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_iv_j \leqslant n$
Sugerencia: Proponer una matriz de Householder.

[1] Una matriz A es de Hessenberg si todos sus coeficientes debajo de la primera subdiagonal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$ para todo (i, j) tal que $i \geqslant j + 2$.

HOJA N°

FECHA

① a)

Numero los elementos de S: $\{x, Cx, \dots, C^{r-1}x\} = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$

Tenemos que $C^r . y = C^r . C^{i-1} . x = C^{i-1} . C^r . x = C^{i-1} . 0 = 0 \Rightarrow S \subseteq Nu(C^r)$

c) Por el Teorema de la dimensión, $n = \dim(Im(C^r)) + \dim(Nu(C^r))$

Entonces $\dim(Im(C^r)) \leq n - r \iff \dim(Nu(C^r)) \geq r$

Esto último vale porque por los incisos a) y b) sabemos que existen r vectores LI dentro del núcleo de C^r por lo que la dimensión de este es de al menos r.

b) Supongamos que no es LI. Entonces:

$\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ reales no todos 0 Tq $\alpha_0 x + \alpha_1 Cx + \alpha_2 C^2 x + \dots + \alpha_{r-1} C^{r-1} x = 0$

Sea α_k el primero distinto de 0, Tenemos que:

$$\alpha_k . C^k x + \alpha_{k+1} . C^{k+1} x + \dots + \alpha_{r-1} C^{r-1} x = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_k C^k x = -\alpha_{k+1} . C^{k+1} x - \dots - \alpha_{r-1} C^{r-1} x$$

Tenemos que $C^{r-k-1} . \alpha_k . C^k x = \alpha_k . C^{r-1} x \neq 0$ Porque...

Pero también tenemos que

$$C^{r-k-1} . \alpha_k . C^k x = C^{r-k-1} . \sum_{i=k+1}^{r-1} (-\alpha_i) . C^i . x = \sum_{i=k+1}^{r-1} (-\alpha_i) . C^{r-k+i-1} . x$$

$\to$ 0 porque $i \geq k+1 \Rightarrow C^{r-k+i-1}$ es C^r, C^{r+1}, etc.

y sabemos que $C^r x = 0$

Llegamos a que $C^{r-1} x \neq 0$ y $C^{r-1} x = 0$ Absurdo que vino de suponer S no LI, Luego S es LI

NOTA

Ejercicio 2:

Inducción en K:

Caso base $K=0$, ninguna columna ha sido Triangulada. $a_K = a_0 \leq (0+1)a_0$ ✓
verifica

Paso inductivo: vale que $a_i \leq (i+1)a_0 \quad \forall i \in 0,\dots,K$

quiero ver que vale $a_{K+1} \leq (K+2)a_0$

~~Como hay pivoteo parcial sabemos que~~ ¿en qué paso? ¿el $K+1$?

Los únicos elementos que fueron modificados en la matriz fueron a_{ij} para $i \geq K+1$ y $j \geq K+1$ y los nuevos ceros

Los cuales fueron modificados de la siguiente manera

$$a_{ij}^{(K+1)} = a_{ij}^{(K)} - \frac{a_{i,K+1}^{(K)}}{a_{K+1,K+1}^{(K)}} \cdot a_{K+1,j}^{(K)}$$ en el $K+1$-ésimo paso de elim Gaussiana

ok

$$|a_{ij}^{(K+1)}| = \left| a_{ij}^{(K)} - \frac{a_{i,K+1}^{(K)}}{a_{K+1,K+1}^{(K)}} \cdot a_{K+1,j}^{(K)} \right| \leq |a_{ij}^{(K)}| + \left| \frac{a_{i,K+1}^{(K)}}{a_{K+1,K+1}^{(K)}} \cdot a_{K+1,j}^{(K)} \right|$$

si hubiera habido intercambio de filas por pivoteo ¿seguiría siendo de Hessenberg?

Pero en realidad, como A es de Hessenberg, sólo se actualiza la fila $K+2$ ya que $a_{x,K+1} = 0 \quad \forall x \in K+3, K+4, \dots, n$ por estar debajo de la primera subdiagonal

$$|a_{K+2,j}^{(K+1)}| \leq |a_{K+2,j}| + \Big| \underbrace{\frac{a_{K+2,K+1}^{(K)}}{a_{K+1,K+1}^{(K)}}}_{\leq 1 \text{ por pivoteo parcial}} \cdot a_{K+1,j}^{(K)} \Big|$$

en valor absoluto

$$\leq |a_{K+2,j}^{(K)}| + |a_{K+1,j}^{(K)}|$$

Ahora notemos que como en cada paso K de elim Gaussiana sólo se modifica la fila $K+1$ de A por lo explicado recién, tenemos

(*) que $a_{K+2,j}^{(K)} = a_{K+2,j}^{(0)} \leq a_0$ es decir que este elemento

(*) no si hubo intercambio de filas por pivoteo parcial.

es recién ahora la primera vez que lo vamos a modificar (*).
usando esta cota de recién más la de la hipótesis inductiva HI
llegamos a que

$$\left|a^{(k+1)}_{k+2,j}\right| \leq \underbrace{\left|a^{(k)}_{k+2,j}\right|}_{\substack{\leq a_0 \\ \text{por lo de recién}}} + \underbrace{\left|a^{(k)}_{k+1,j}\right|}_{\substack{\leq a_k \leq (k+1)a_0 \\ \text{HI}}} \leq a_0 + (k+1)\, a_0 = (k+2)\, a_0$$

Los elementos no modificados cumplen trivialmente por HI $\square$

B-

Faltaría ver que el subbloque A_{22} de lo que no se trianguló sigue siendo de Hessenberg.

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 3:

a) $\Rightarrow$) Sabemos $z^t A z > 0 \;\; \forall z \notin Nu(A)$

qvq $y^t A y > 0 \;\; \forall y \in Nu(B)$ no nulo

$z^t A z > 0 \iff (x+y)^t A (x+y) > 0 \iff (x+y)^t (\underbrace{Ax}_{0 \text{ pq } x \in Nu(A)} + Ay) > 0$

$\iff (x+y)^t A y > 0 \iff \underbrace{x^t A y}_{\substack{0 \text{ pq } x \in Nu(A) \\ \text{y A simétrica}}} + y^t A y > 0 \Rightarrow y^t A y > 0 \;\; \forall y \in Nu(B)$ no nulo

Porque $z \notin Nu(A)$ y como $\forall z \in \mathbb{R}^n \; \exists! \, x \in Nu(A), y \in Nu(B)$ tq $z = x + y$ implica $y \neq 0$ ya que si no, $z = x$ Absurdo pq $z \notin Nu(A)$ pero x sí

$\Leftarrow$) Sabemos $y^t A y > 0 \;\; \forall y \in Nu(B)$ no nulo

qvq $z^t A z > 0 \;\; \forall z \notin Nu(A)$

Sabemos que $\exists \, x \in Nu(A)$ tq $y + x = z$

supongamos que existe $z \,/\, z^t A z \leq 0 \wedge z \notin Nu(A)$

$z^t A z \leq 0 \iff$ misma cadena de antes $\iff y^t A y \leq 0$ para un $y \in Nu(B)$, sabemos que $y \neq 0$ porque $z = x + y$ y $z \notin Nu(A)$ y $x \in Nu(A)$

Absurdo! Luego vale la vuelta.

Nota: si algo vale para todo z, ahí estamos viendo que está involucrado todo y, porque $Nu(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces tomamos $z \in Nu(B)$ y nos queda $z = 0 + y$. Por eso vale el "para todo" de la ida. Lo mismo para x.

NOTA

b) $\Rightarrow$) Sabemos que A sim, $A-B$ SDP

qvq: 1_ A y B sim

2_ $\forall x \in Nu(A), y \in Nu(B)$ vale que $y^tAy > x^tBx$ excepto si $x=y=0$

A simétrica vale por Hipótesis. $A-B$ SDP nos dice $(A-B)^t = A-B$

y $(A-B)^t = A^t - B^t \underset{A \text{ simétrica}}{=} A - B^t \Rightarrow A-B^t = A-B \Rightarrow B = B^t \Rightarrow B$ simétrica

Como $A-B$ SDP: $\forall z \neq 0 \quad z^t(A-B)z > 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^t(A-B)(x+y) > 0$ con $x \in Nu(A)$ e $y \in Nu(B)$

$(x+y)^t(\underbrace{Ax}_{0} + Ay - Bx - \underbrace{By}_{0}) > 0 \Leftrightarrow (x^t + y^t)(Ay - Bx) > 0$

$\Rightarrow \underbrace{x^tAy}_{\substack{0 \\ \text{pq } A \text{ simétrica}}} - x^tBx + y^tAy - \underbrace{y^tBx}_{\substack{0 \text{ pq} \\ B \text{ simétrica}}} > 0 \Rightarrow y^tAy - x^tBx > 0 \Rightarrow y^tAy > x^tBx$

Y esto vale para todo x e y por lo visto anteriormente a excepción de que acá no es $\forall z \in \mathbb{R}^n$ sino que $z \neq 0$ por lo que $x \neq 0 \vee y \neq 0$ si ambos son 0, Trivialmente no vale la desigualdad

($\Leftarrow$) Sabemos que A y B simétricas, y que $\forall x \in Nu(A), y \in Nu(B)$ vale que $y^tAy > x^tBx$ excepto si $x=y=0$

qvq A simétrica, $A-B$ SDP

A es simétrica por Hipótesis. Veamos $A-B$ simétrica; $(A-B)^t = A^t - B^t = A-B$ pq por Hipótesis A y B son simétricas. Listo.

Ahora veamos $A-B$ DP.

$y^tAy > x^tBx \Rightarrow y^tAy - x^tBx > 0 \Rightarrow x^tAy - x^tBx + y^tAy - y^tBx > 0$

pq $x^tAy = -y^tBx = 0$ pq $x \in Nu(A), y \in Nu(B)$, A y B simétricas

$\Rightarrow (x+y)^t(\underbrace{Ax}_{0} + Ay - Bx - \underbrace{By}_{0}) > 0 \Rightarrow (x+y)^t(A-B)(x+y) > 0 \Rightarrow z^t(A-B)z > 0$

Y esto vale para todo $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ pq sabemos ~~que todo~~ por enunciado que todo $z \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $(x+y)$ y estamos prediciendo $\forall x \in Nu(A)$, $\forall y \in Nu(B)$. Con $z \neq 0$ pq $x \neq 0 \vee y \neq 0$

Luego $(A-B)$ DP.

NOTA

Sigue ejercicio 3:

c) $A = B + LL^t \iff A - B = LL^t \iff A - B$ SDP

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-b_1 & 1 \\ 1 & 1-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}$$

Nos queda igualando posición a posición que $1 - b_1 = l_{11}^2$, $1 = l_{11} . l_{21}$,
$1 = l_{11} . l_{21}$, $1 - b_2 = l_{21}^2 + l_{22}^2$

Esto ya nos dice que b_1 y b_2 son menores a 1
Y menores a ~~..~~ 0 incluso pq sabemos que las matrices SDP tienen el elemento de mayor módulo en la diagonal.

propongo $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Lo cual verifica lo pedido

$Nu(A) = \langle (1,-1) \rangle$, $Nu(B) = \langle (1,0) \rangle$

verifica que todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como $x+y$ con $x \in Nu(A)$ y $y \in Nu(B)$ de una única manera ya que $\{(1,-1),(1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 4:

$\frac{27}{27}$

a) Como q ortogonal, todas sus filas f_i tienen norma 2 igual a 1
Notar que esto implica $|q_{ij}| \leq 1 \ \forall i, j \in 1, \dots, n$
Porque si no, la fila de ese elemento tendría norma 2 mayor a 1 lo que significaría que las filas de q no son ortonormales lo que significaría q no ortogonal! Más formalmente:

sea $q_{ij} > 1$, $\quad \|f_i\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^2} = \sqrt{\underbrace{q_{ij}^2}_{>1} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} q_{ik}^2}_{\geq 0}} > 1$ Abs!

~~Veamos ahora que cada fila de q es tal que la suma de sus elementos es menor a 1, de lo cual se deduce inmediatamente que $S(q) \leq n$ ya que es sumar n filas:~~

$$\cancel{1 = \|f_i\|_2 = \|f_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^2 \underset{q_{ij} \leq 1}{\geq} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \text{suma de los elems de la fila}}$$

b) ~~$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la rotación 90° en sentido horario~~
$G_1 = I^{n \times n}$ ~~que es la rotación de 0 grados~~ se verifica $|S(G_1)| = n$ ✓

$$G_2 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & I^{n-2 \times n-2} \end{array}\right)$$

rota ese plano 90° en sentido horario
se verifica $|S(G_2)| < n$ ya que

$S(G_2) = 1 - 1 + (n-2) = n - 2$ ✓

NOTA

c) Propongo $I - 2vv^t$, notar que $S(I-2vv^t) = $ ~~[illegible]~~
$= \underline{S(I)} - 2S(v.v^t)$

Y notar que $(v.v^t)_{ij} = v_i . v_j$ por lo cual $S(v.v^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j$

Y por inciso a), como $I - 2v.v^t$ ortogonal, tenemos que $|S(I-2vv^t)| \leq n$ ya que $\|v\|_2 = 1$

por un lado $\Rightarrow -2S(v.v^t) \leq n - S(I)$

$-2S(v.v^t) \leq 0$

$S(v.v^t) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \geq 0$ ✓

Y por el otro lado del módulo:

$\Rightarrow + S(I) - 2S(vv^t) \geq -n$

$2n \geq 2S(vv^t)$

$n \geq S(vv^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j$ ✓

Sigo intentando el a):

Notar que $u^t q u = S(q)$ donde $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$

Y notar que $\|u\|_2 = \sqrt{n}$

Tenemos que $u^t q u = S(q) \Rightarrow \|u^t q u\|_2 = \|S(q)\|_2 = |S(q)|$

Y $\|u^t q u\|_2 \underset{\text{submult.}}{\leq} \|u^t\|_2 . \|q u\|_2 \underset{q \text{ ortog.}}{=} \|u^T\|_2 . \|u\|_2 = \|u\|_2^2 = n$

Luego $|S(q)| \leq n$ ✓ $\square$